

Comprendre les nombres pour bien mesurer* et bien calculer

*dénombrer, mémoriser, comparer les quantités

IFE 2 au 4 décembre 2019

Christine Chambris christine.chambris@u-cergy.fr
Laboratoire de didactique André Revuz
Université de Cergy-Pontoise – INSPé de Versailles

Enjeu

- Comprendre la structure en (centaines,) dizaines et unités des nombres contenue dans :
 - leur écriture chiffrée (94 ; 108 ; 2327)
 - leur nom (quatre-vingt-quatorze ? cent-huit ? deux-mille-trois-cent-vingt-sept)
- pour bien mesurer et bien calculer !
 - dénombrer, mesurer, communiquer, comparer des quantités
 - calculer

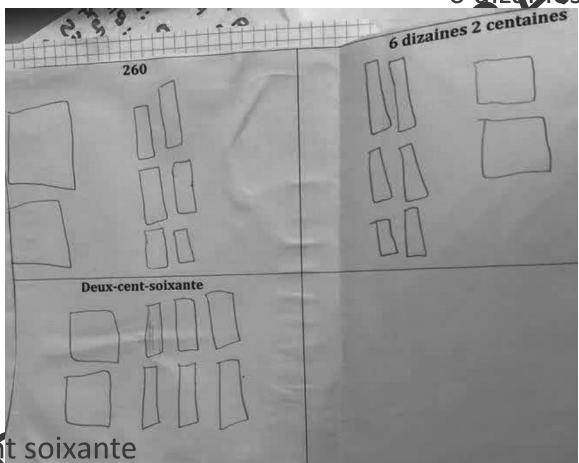
- Un tour des difficultés
- Pistes pour la classe
- Pistes pour des formations

Comprendre la structure des nombres pour bien agir avec eux

- Trois systèmes de signes avec chacun ses particularités, son fonctionnement, sa complexité

Comprendre la structure des nombres pour bien agir avec eux

unités de numération
écritures chiffrées
260



deux cent soixante
noms de nombres

(L. Favocchia, mémoire MEEF1, 2018)

2 au 4 décembre 2019

C. Chambris, LDAR UCP - IFE - Continuité

5

Comprendre la structure des nombres pour bien agir avec eux

- Trois systèmes de signes avec chacun ses particularités, son fonctionnement, sa complexité :
 - L'écriture chiffrée
 - Les noms des nombres
 - Les unités de numération
- « Pièges » pour l'enseignant :
 - connaissances naturalisées
 - de multiples chemins pour atteindre un même but
 - variations dans les prescriptions institutionnelles

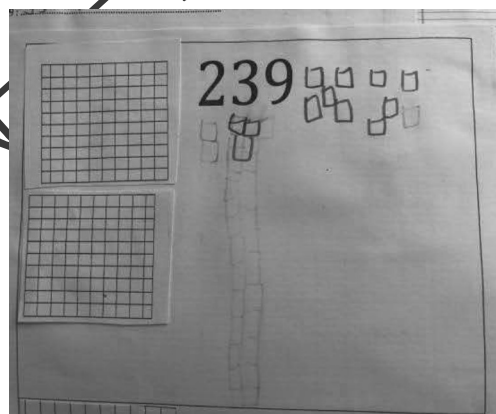
2 au 4 décembre 2019

C. Chambris, LDAR UCP - IFE - Continuité

6

La difficulté de l'écriture chiffrée*

- 239 (deux trois neuf)
 - 2 qui ne vaut pas 2
 - 3 qui ne vaut pas 3
 - 9 qui vaut 9 !



2 au 4 décembre 2019

C. Chambris, LDAR UCP - IFE - Continuité

7

*On parle aussi d'écriture positionnelle ou encore écriture décimale

La difficulté des noms des nombres en français

- En français : beaucoup d'irrégularités, structure en dizaines et unités peu audible, et même partiellement inexistante

dix	vingt	trente	quarante	soixante	soixante-dix
un	onze	vingt-et-un	trente-et-un	quarante-et-un	soixante-et-un
deux	douze	vingt-deux	trente-deux	quarante-deux	soixante-deux
trois	treize	vingt-trois	trente-trois	quarante-trois	soixante-trois
quatre	quatorze	vingt-quatre	trente-quatre	quarante-quatre	soixante-quatre
cinq	quinze	vingt-cinq	trente-cinq	quarante-cinq	soixante-cinq
six	seize	vingt-six	trente-six	quarante-six	soixante-six
sept	dix-sept	vingt-sept	trente-sept	quarante-sept	soixante-sept
huit	dix-huit	vingt-huit	trente-huit	quarante-huit	soixante-huit
neuf	dix-neuf	vingt-neuf	trente-neuf	quarante-neuf	soixante-neuf

2 au 4 décembre 2019

C. Chambris, LDAR UCP - IFE - Continuité

La difficulté des noms des nombres en français

- Entre 1 et 99, la « composition » en unités de numération
 - ne s'entend pas dans le nom : vingt
 - s'entend peu dans les noms : onze->seize, noms des dizaines
 - ne s'entend pas clairement : trente-sept (du fait du nom de dizaine)
 - ne s'entend pas du tout : quatre-vingt-douze (organisation liée à la base 20)
- Au-delà de 99 :
 - cent et non **un** cent,
 - mille et non **un** mille
- Des difficultés qu'on croyait résolues...
 - CM1 (n=28) deux millions trois cent quarante mille cent cinq (Mercier, 1997) 2 340 105 (19), 2 340 500 (6), 2 340 050.
 - Fin CE2 (n=21) deux mille trois cent vingt sept (2013) 2327 (20), 2307 mille cinq cent soixante douze 1572 (13), 5060, 5612 (2), 5172 (2), 500072, 15072, ∅

Connaissances liées aux unités de numération

- Un malentendu, la dizaine comme « position » :
 - Dans 62, le 6 c'est les dizaines, le 2 c'est les unités.
 - **6 quoi ?**
- Deux éléments de réponse
 - 6 c'est soixante (60 unités),
 - 6 compte des dizaines (6 dizaines).

Connaissances liées aux unités de numération

- Les unités de numération sont des unités
 - L'unité, c'est ce qu'on compte
 - L'unité, c'est ce qui permet de mesurer
- Mesurer une même quantité avec des unités différentes
 - Une durée : 2 semaines ou 14 jours. 3 semaines ou 21 jours.
 - Une longueur : 3 décimètres (en reportant des décimètres) ou 30 centimètres (en comptant des centimètres sur la règle)

Connaissances liées aux unités de numération

- 3 cm est-il une unité ?
- 10 étoiles ?
- Le nombre 3 ? Le nombre 10 ?

Connaissances liées aux unités de numération

- Le nombre dix : un de plus que 9
- Une dizaine, c'est dix.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
dix étoiles
ou
une dizaine d'étoiles

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
dix étoiles
ou
une dizaine d'étoiles

Un, deux, trois, ..., dix, onze, douze, ... vingt, vingt-et-un, ...
vingt-neuf, trente étoiles.
Dix, vingt, trente étoiles.

★ ★ ★ ★ dix étoiles
ou
★ ★ ★ une dizaine d'étoiles

La dizaine peut former une nouvelle unité.
1, 2, 3 dizaines d'étoiles

L'unité est la dizaine d'étoiles.
Besoin de compter jusqu'à 3... (et dix ?)
Au lieu de trente.

Connaissances liées aux unités de numération

- Les unités de numération sont des unités
- Compter des étoiles :
 - Avec l'unité simple : l'étoile
 - Avec l'unité composée : la dizaine d'étoiles
 - Trente étoiles ou 3 dizaines d'étoiles
- Penser simultanément plusieurs niveaux d'unités :
 - l'unité simple
 - et l'unité composée

Connaissances liées aux unités de numération

- **Une dizaine** c'est dix ! (comme une vingtaine, c'est vingt) : **un nombre, le nombre dix, dit autrement**
- **La dizaine comme unité de compte** : une difficulté conceptuelle avérée
 - Compter un alors qu'il y a plusieurs (UNE dizaine, DEUX dizaines, alors qu'il y a DIX de plus à chaque fois)
 - Compter des dizaines, comme on compte des unités : **une unité de compte**
 - Mesurer une quantité en dizaines

Les correspondances entre les systèmes de signes

Dans l'écriture chiffrée d'un nombre, à partir de la droite, le premier chiffre indique des unités, le deuxième des dizaines, le 3^e des centaines, le 4^e des milliers.

234

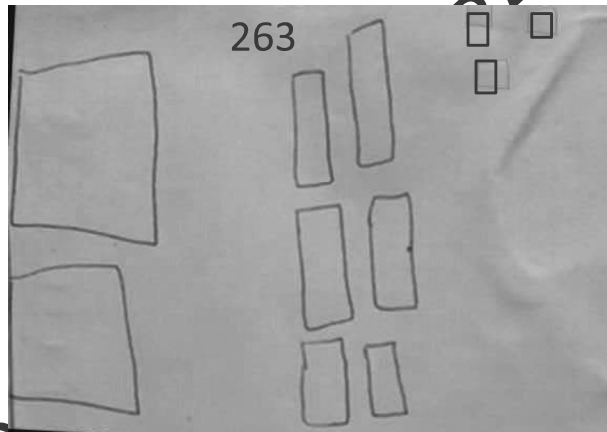
Nombre à trois chiffres :
2 se dit deux cent puis
3 se dit trente puis
4 se dit quatre

2 centaines 3 dizaines 4 unités

deux cent trente quatre

2 centaines se disent deux cents
3 dizaines se disent trente
4 unités se disent quatre

Une difficulté pour l'enseignant : repérer les connaissances mobilisées par les élèves



Plusieurs interprétations possibles de la réalisation d'un écriture numérique

- Interprétation passant par la lecture du nombre : deux cent soixante trois
 - Procédure : appui sur la comptine numérique orale : 100, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 261, 262, 263
 - Connaissances : EC <-> nom du nb ; comptine orale ; comptage unités simples
- Interprétation en décomposition « additive » : deux cent + soixante + trois
 - Procédure : appui sur la comptine numérique orale pour chaque « taille » : 100, 200; 10, 20, 30, 40, 50, 60 ; 1, 2, 3
 - Connaissances : EC <-> nom du nb; déc. orale ; comptine orale ; comptage unités simples
- Interprétation passant par les unités de numération : 2 centaines, 6 dizaines et 3 unités
 - Procédure : Compter les centaines : 1 centaine, 2 centaines; compter les dizaines : 1, 2, 3, 4, 5, 6 dizaines; compter les unités : 1, 2, 3 unités
 - Connaissances : EC <-> unités ; comptage en unités

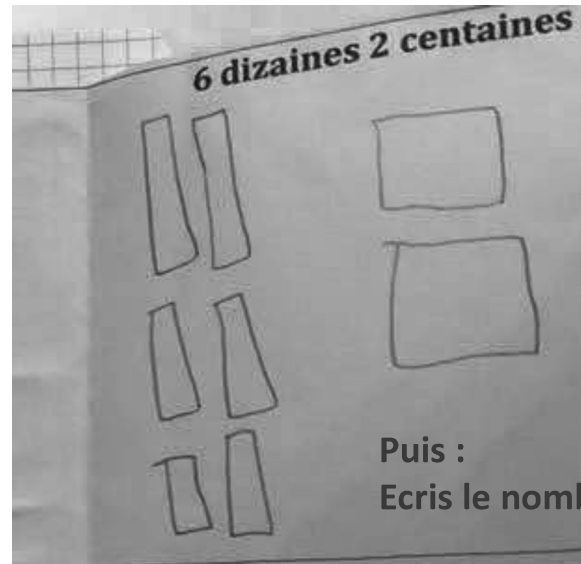
Une sur-utilisation de la comptine numérique pour justifier les calculs

- Exemple tiré de la thèse de Rinaldi, 2016
- 137-50 (CE2)
- Phase de correction
- Aider les élèves en difficultés
 - $137-30 = 107$
 - Enlever 20 à 107 ?
 - Le maître dit cent sept, on enlève dix, 97, et encore dix, 87
- Conséquence :
 - Les élèves les plus fragiles ne sont pas mis en situation d'apprendre qu'on peut enlever 2 dizaines à 107
 - $107 = 100 + 7$, $100 = 1 \text{ centaine} = 10 \text{ d}$, $10 \text{ d} - 2 \text{ d} = 8 \text{ d}$
 - $107 - 2 \text{ d} = 8 \text{ d} + 7 = 87$

Des pistes pour la classe

Dénombrer en sollicitant explicitement différents types de connaissances

DOCUMENT DE TRAVAIL



TRAVAIL

Problèmes de comparaisons

- Avec « jeu » sur les systèmes de désignation

Qui a le plus de bonbons ? Entoure son prénom à chaque fois.

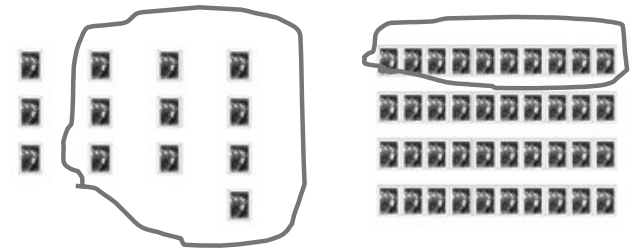
5d 8u

6d

(Mon année de maths, CP, SED)

Exprimer une même quantité de plusieurs façons

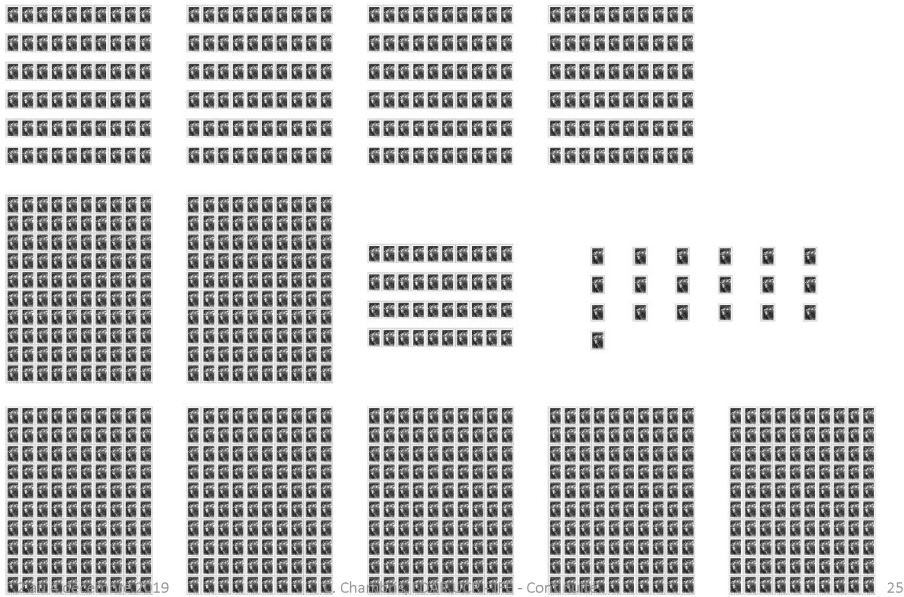
- 13 u 4 d
- 4 d 13 u
- 3 d 23u
- 5 d 3 u



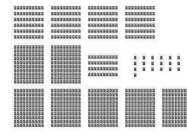
- Comment obtenir ces expressions ?

- Apprendre à voir ce qui est « facile » à voir
- Apprendre à convertir en appui sur le matériel
- Apprendre à convertir en appui sur les relations entre unités comme $1 d = 10 u$ alors par exemple : $4d 13u = 4d + 10u + 3u (= 4d + 1d + 3u) = 5d + 3u$

Combien y a-t-il de centaines de timbres ?

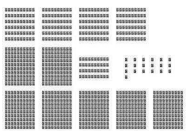


Combien y a-t-il de centaines de timbres ?



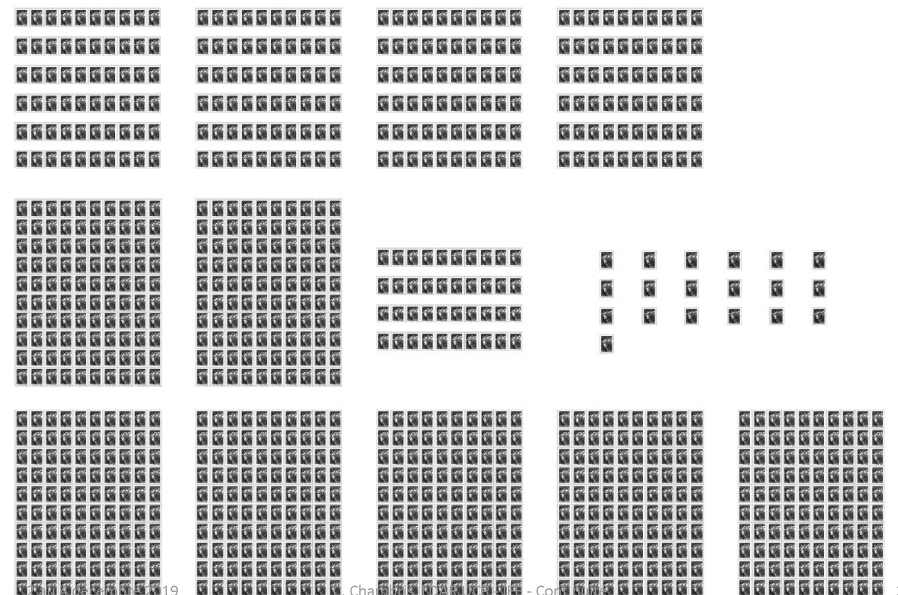
- Comptine orale : neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf puis...
- neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf c'est 999 puis 9 chiffre des centaines
 - neuf cent, c'est 9 centaines

Combien y a-t-il de centaines de timbres ?



- Compter les centaines de timbres.
- Ce qui est facile à voir : **7 centaines**, 28 dizaines et 19 timbres
 - Les autres centaines de timbres qu'on peut **voir** :
 - En faisant des paquets de 10 barres de dix timbres (cent timbres dans chaque paquet, car dix fois dix cent ? car dix, vingt, trente...)
 - Les autres centaines de timbres qu'on peut **savoir** :
 - En appuyer sur la relation 1 centaine = 10 dizaines
 - d'où 9 centaines de timbres et 99 timbres.

Combien y a-t-il de centaines de timbres ?

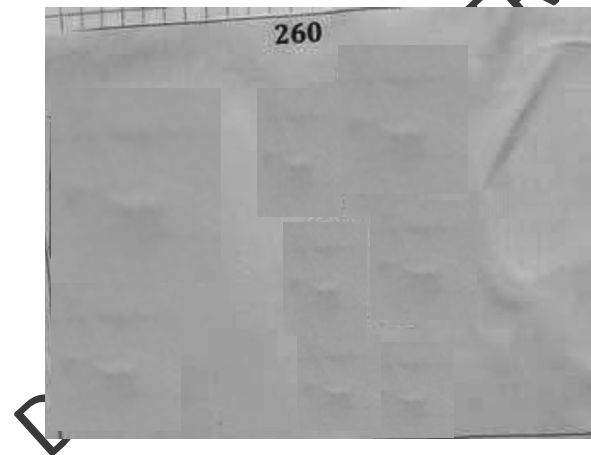


Utiliser des moyens de contrôle

- Utiliser différentes modalités d'expression du nombre

DOCUMENT DE TRAVAIL

- Dénombrer en appui sur le nom du nombre deux cent soixante puis la comptine cent deux cents...
- Chercher une stratégie de vérification.
 - Avec la « même » méthode, à l'envers : cent, deux cents... puis...
 - En comptant des centaines et des dizaines, soit 2 c 6 d et trouver l'écriture chiffrée (2 en 3^e position...)



Contrôle avec les unités

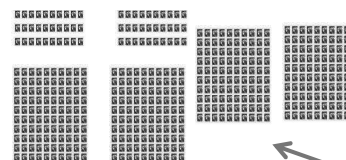
1 centaine 7 dizaines 8 unités	178
2 centaines 6 dizaines 8 unités	268
7 dizaines 5 unités 3 centaines	753
6 dizaines 4 centaines	64
2 centaines 2 unités	22

6 dizaines et 4 unités

(CER L. Favocchia, mémoire MEEF1, 2018)

DOCUMENT

Contrôle avec matériel



soixante-quatre,
dix, vingt, ... soixante-
et-un, deux, trois
quatre



1 centaine 7 dizaines 8 unités	178
2 centaines 6 dizaines 8 unités	268
7 dizaines 5 unités 3 centaines	753
6 dizaines 4 centaines	64
2 centaines 2 unités	22

46

(L. Favocchia, mémoire MEEF1, 2018)

Propriété de position de l'écriture chiffrée :

- chaque place de l'écriture chiffrée indique des unités d'une certaine taille
- unités simples (un) à droite, la dizaine en 2^e, la centaine en 3^e
- le signe zéro marque les ordres d'unité non représentés

Vigilance de l'enseignant

- Les différents systèmes de signe sont clairement distincts
- Il existe plusieurs façons de passer de l'un à l'autre
- Cette pluralité doit inciter une grande vigilance :
 - Pour mobiliser les systèmes et les correspondances entre systèmes selon les moments. Quoi ? Quand ?
 - Pour repérer les connaissances que les élèves mobilisent et les faire, si nécessaire, évoluer. Quelles connaissances l'élève a-t-il mobilisées pour traiter la tâche ? Les repérer reste complexe.

Vigilance de l'enseignant

- Pour *parler les nombres* au quotidien
 - Sur votre compteur formez le nombre trois-cent-soixante-quatorze
 - Ajouter dix.
 - Ajouter dix
 - Qu'avez-vous trouvé ?
 - Alternatives ? Dire ?
 - Former le nombre trois-cent-soixante-quatorze, il s'écrit trois sept quatre
 - Quel nombre as-tu trouvé ? Comment s'écrit-il ?
 - OU
 - Former le nombre qui a 3 centaines 7 dizaines et 4 unités, il se dit trois-cent-soixante-quatorze
 - Quel nombre as-tu trouvé ? Comment s'écrit-il ?
- OU...

Et pour le calcul ?

- Donnés à l'écrit ? Donnés à l'oral ?
- des décompositions des nombres liées à la numération et/ou utilisation des unités
- $57-7$ (référence à $50+7$)
- $5d+23$ (référence à $5c$ et $2d$)
- $76 + 80$ (référence à $7d + 8d = 15d=1c + 5d$)
- Et $137-50$? $13d-5d+7u$?
- $53-7$? (référence à $50+3$ ou à $40+13$?)

Pistes pour des formations

- Sur des extraits de séances de classe, sur des productions, repérer et analyser les connaissances mobilisées liées à la numération dans des tâches (enseignant / élève) de calcul ou de dénombrement, envisager des alternatives
- Sur des productions erronées, envisager les moyens de contrôle en appui sur un autre système de désignation
- Adapter des tâches habituelles pour mieux cibler les connaissances de numération visées.
- Repérer la place faite aux noms des nombres dans les manuels
- Analyser les procédures de calcul proposées dans les manuels, au plan de la numération

- Merci de votre attention

DOCUMENT DE TRAVAIL